

中国科学院研究生院
2007 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（乙）

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上无效。

一、填空题 (本题满分 30 分，每个空格 6 分。请将你的答案标清题号写在考场发的答题纸上，直接填在试题空格内无效。)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sin 2x \cdot (x^2 + 3x)} = (\quad)$ 。
2. 设 $y = y(x)$ 是由 $x - \int_1^{y+x} e^{-t^2} dt = 0$ 所确定的函数， $y(0) = 1$ ，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = (\quad)$ 。
3. 设 $\varphi(u, v, w)$ 有一阶连续偏导数， $z = z(x, y)$ 是由 $\varphi(bz - cy, cx - az, ay - bx) = 0$ 确定的函数，则 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$ 。
4. 已知 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某个邻域内可展成泰勒级数，且 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，则 $f''(0) = (\quad)$ 。
5. 微分方程 $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ 的通解是 (\quad) 。

二、选择题 (本题满分 30 分，每小题 6 分。请从题目所列的选项中选择一项正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ a, & x \geq 1 \end{cases}$ ， $g(x) = \begin{cases} b, & x < 0 \\ x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$ ， $f(x) + g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，

则 a, b 的值为 _____。

- A. $a = 1, b = 2$ B. $a = -1, b = 2$ C. $a = 2, b = 3$ D. $a = -2, b = 3$

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 x_0 处二阶可导，且 $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ， $f'(x_0) \cdot g'(x_0) > 0$ ，则 _____。

- A. x_0 不是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点
 B. x_0 是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 但不是 $f(x) \cdot g(x)$ 的极值点
 C. x_0 是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 且是它的极小值点
 D. x_0 是 $f(x) \cdot g(x)$ 的驻点, 且是它的极大值点

3. 若曲线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切, 则 $a =$ _____。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2e}$ C. e D. $2e$

4. 设 $y = f(x)$ 在点 x 处的改变量 $\Delta y = \frac{x\Delta x}{\sqrt{1+x^2}} + o(\Delta x)$, 其中 $o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小量, $f(0)=1$, 则 $f(2) =$ _____。

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n4^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径 r 和收敛域是: _____

- A. $r = 1$, 收敛域为 $[-1, 1]$ 。 B. $r = 1$, 收敛域为 $(-1, 1)$ 。
 C. $r = 2$, 收敛域为 $(-2, 2)$ 。 D. $r = 2$, 收敛域为 $[-2, 2]$ 。

三、(本题满分 10 分) 求平行于平面 $x + y + z = 9$ 且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 相切的平面方程。

四、(本题满分 10 分) 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 $\int xf'(x)dx$ 。

五、(本题满分 10 分) 计算 $I = \oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是正方形边界 $|x| + |y| = 1$ 的逆时针方向。

六、(本题满分 10 分) 设 $f(x, y, z)$ 是可微函数, 且对任意实数 $t > 0 > 0$, 有 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$ 。证明: $f(x, y, z)$ 满足 $xf'_x + yf'_y + zf'_z = kf(x, y, z)$ 。

七、(本题满分 10 分) 解微分方程 $y' \cos y = (1 + \cos x \sin y) \sin y$ 。

八、(本题满分 10 分) 设抛物线 $y = ax^2 + 2bx + c$ 通过原点, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$ 。如果它与 x 轴、直线 $x = 1$ 所围成图形的面积为 $\frac{1}{3}$, 试确定 a, b, c , 使得这个图形绕 x 轴旋转所成的立体体积最小。

九、(本题满分 10 分) 设 $1 < a < b$, $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, 求证 $0 < f(b) - f(a) \leq \frac{1}{4}(b - a)$ 。

十、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 具有连续二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 试

求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$ 。

十一、(本题满分 10 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n$ 的收敛半径及和函数。